

Лекция 5

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

План

1. Уравнения состояния электрических цепей
2. Алгоритм формирования уравнений состояния
3. Примеры составления уравнений состояния
4. Выводы

1. Уравнения состояния электрических цепей

Поведение электрической цепи описывается в общем случае системой дифференциальных уравнений. С помощью подстановок и замены переменных эту систему уравнений можно преобразовать к одному дифференциальному уравнению n -го порядка. Как правило, порядок уравнения равен суммарному числу индуктивных и емкостных элементов: $n = n_L + n_C$. Однако для нелинейной цепи решить дифференциальное уравнение n -го порядка трудно, а часто просто невозможно. Более рационально записывать систему дифференциальных уравнений в нормальной форме (форме Коши).

Уравнения в форме Коши состоят из уравнений первого порядка, разрешенных относительно первой производной одной из переменных. В левой части каждого уравнения записывают производную, а в правой – функции переменных цепи и напряжений и токов независимых источников. Обозначим выбранные переменные x_1, x_2, \dots, x_n . Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{u}), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{u}), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{u}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

В системе уравнений (5.1) \bar{u} – вектор напряжений и токов независимых источников. Уравнения в форме (6.1) называют *уравнениями*

состояния, а переменные x_1, x_2, \dots, x_n – переменными состояния. Для электрических цепей в качестве переменных состояния удобно выбирать напряжения емкостных и токи индуктивных элементов, поскольку эти переменные определяют запас энергии в цепи.

Уравнения (6.1) получили название "уравнений состояния" потому, что при известных начальных значениях переменных состояния $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ в некоторый момент времени t_0 мы можем определить эти переменные и в момент $t > t_0$. Чтобы показать это, зададим малое приращение времени $\Delta t = h$. Тогда

$$\begin{aligned} x_1(t_0 + h) &\approx x_1(t_0) + h \frac{dx_1(t_0)}{dt}, \\ x_2(t_0 + h) &\approx x_2(t_0) + h \frac{dx_2(t_0)}{dt}, \\ & \\ x_n(t_0 + h) &\approx x_n(t_0) + h \frac{dx_n(t_0)}{dt}. \end{aligned}$$

Далее мы можем определить значения переменных при $t = t_0 + 2h$, $t_0 + 3h$ и т. д. Таким образом, уравнения (5.1) позволяют определить состояние цепи в любой момент времени при известных начальных значениях переменных. Если известны значения переменных состояния, то легко могут быть найдены и остальные токи и напряжения.

В качестве примера запишем уравнения состояния последовательной RLC -цепи (рис. 6.1).

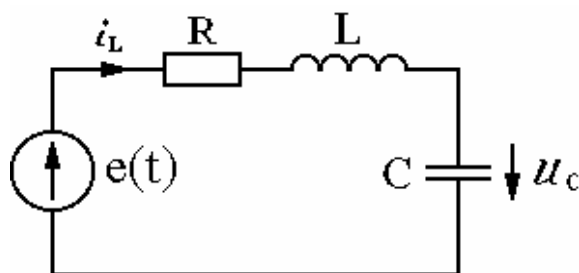


Рис. 5.1

В соответствии с вторым законом Кирхгофа

$$u_I(t) = -Ri_I(t) - u_C(t) + e(t). \quad (5.2)$$

Поскольку индуктивный и емкостный элементы соединены последовательно, их токи равны:

$$i_L(t) = i_C(t). \quad (5.3)$$

Разделим левую и правую части уравнения (5.2) на L , а левую и правую части уравнения (5.3) – на C . Учитывая, что $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, $i_C = C \frac{du_C}{dt}$, получим уравнения состояния:

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= -\frac{R}{L}i_L(t) - \frac{1}{L}u_C(t) + \frac{1}{L}e(t), \\ \frac{du_C}{dt} &= \frac{1}{C}i_L(t). \end{aligned}$$

Уравнения состояния удобно записывать в матричной форме:

$$[\dot{\mathbf{X}}(t)] = [A][\mathbf{X}(t)] + [B][U(t)].$$

Здесь $[X]$ – вектор переменных состояния, $[\dot{\mathbf{X}}]$ – вектор производных, $[U(t)]$ – вектор входных воздействий.

Квадратную матрицу $[A]$ называют *матрицей параметров схемы*, а $[B]$ – *матрицей параметров входного воздействия*. Для рассматриваемого примера

$$[A] = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix},$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Зная состояние цепи $[X(t)]$ и вектор входных воздействий $[U(t)]$, реакцию цепи $[Y(t)]$ (токи и напряжения ветвей) можно найти как линейную комбинацию вектора переменных состояния и вектора входных воздействий:

$$[Y(t)] = [C][X(t)] + [D][U(t)].$$

Матрицы $[C]$ и $[D]$ зависят от конфигурации и параметров цепи. Например, если компонентами вектора $[Y(t)]$ являются напряжения u_L и u_R , они находятся с помощью уравнений

$$u_L(t) = -Ri_L(t) - u_C(t) + e(t);$$

$$u_R(t) = Ri_L(t).$$

В матричной форме

$$\begin{bmatrix} u_L(t) \\ u_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R & -1 \\ R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e(t).$$

Существует несколько причин, по которым дифференциальные уравнения электрической цепи целесообразно представлять в форме уравнений состояния. Во-первых, уравнения состояния можно записать как для линейных, так и для нелинейных цепей. Во-вторых, не всегда можно получить аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения, а численные методы решения ориентированы на уравнения, записанные в нормальной форме (5.1). Наконец, в-третьих, матричная форма уравнений состояния не зависит от порядка цепи.

2. Алгоритм формирования уравнений состояния

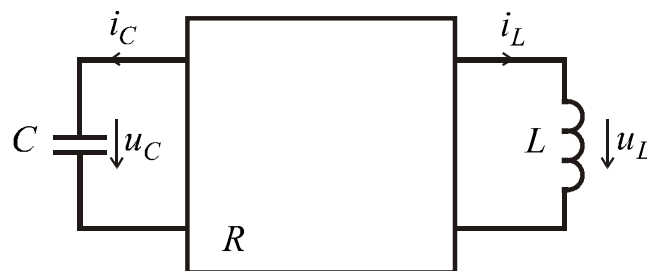
В настоящее время разработаны эффективные компьютерные алгоритмы формирования уравнений состояния цепей любой сложности на ЭВМ. Однако в современных программах компьютерного моделирования электронных цепей такие алгоритмы не используются. Поэтому рассматривать их мы не будем. Познакомиться с этими алгоритмами можно в классическом учебнике по машинному анализу электронных схем [12].

Рассмотрим простой алгоритм формирования уравнения состояния. Он пригодится нам при рассмотрении методов численного интегрирования уравнений состояния.

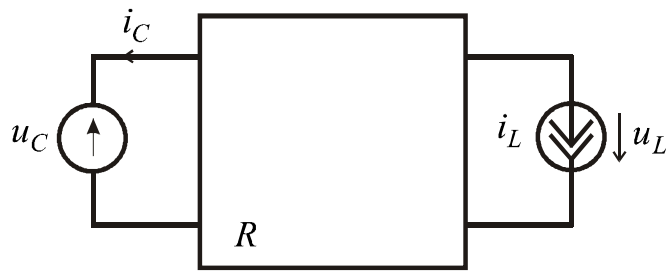
Алгоритм включает следующие шаги.

1. Анализируем цепь в начальный момент времени (при $t = 0_-$) и определяем напряжения емкостных элементов $u_C(0)$ и токи индуктивных элементов $i_L(0)$.

2. Выделяем в анализируемой цепи индуктивные и емкостные элементы (рис. 5.2, а). Заменяем емкостные элементы источниками напряжения $u_C(t)$, а индуктивные – источниками тока $i_L(t)$ (рис. 5.2, б).



а



б

Рис. 5.2

3. Для полученной резистивной схемы замещения составляем уравнения на основании законов Кирхгофа либо с помощью любого другого метода анализа резистивных цепей.

4. Из полученной системы уравнений путем подстановок и исключения переменных выражаем напряжения индуктивных и токи емкостных элементов как функции переменных состояния – токов индуктивностей и напряжений емкостей, а также напряжений и токов независимых источников:

$$u_L = f_1(i_L, u_L, \bar{u}),$$

$$i_C = f_2(i_L, u_C, \bar{u}).$$

5. Делим левую и правую части уравнения для u_L на L , а левую и правую части уравнения для i_C на C . Учитывая, что $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, $i_C = C \frac{du_C}{dt}$, получим уравнения состояния:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} f_1(i_L, u_C, \bar{u}),$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} f_2(i_L, u_C, \bar{u}).$$

Рассмотрим примеры составления уравнений состояния с помощью рассмотренного алгоритма.

Пример 5.1. Составить уравнения состояния для RLC-цепи второго порядка, показанной на рис. 5.3.

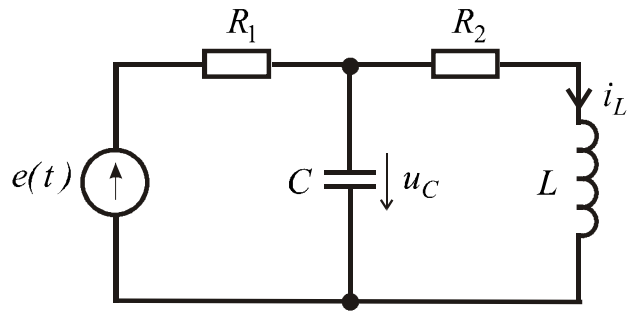


Рис. 5.3

Решение. Составим эквивалентную резистивную схему, заменив индуктивный элемент источником тока, а емкостный – источником напряжения (рис. 5.4). В этой схеме ток источника тока изменяется по закону $i_L(t)$, а ЭДС источника напряжения – по закону $u_C(t)$.

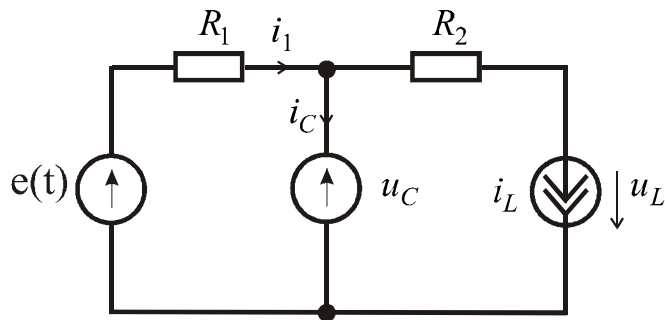


Рис. 5.4

Для схемы на рис. 5.4 запишем уравнения по законам Кирхгофа:

$$-i_1 + i_C + i_L = 0;$$

$$R_1 i_1 = e(t) - u_C;$$

$$R_2 i_L + u_L = u_C;$$

Решив эту систему уравнений относительно i_C и u_L , получим

$$i_C = -\frac{1}{R_1} u_C - i_L + \frac{1}{R_1} e(t);$$

$$u_L = u_C - R_2 i_L.$$

Разделив левую и правую части последних равенств соответственно на C и L , получим уравнения состояния:

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{R_1 C} u_C - \frac{1}{C} i_L + \frac{1}{R_1 C} e(t);$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} u_C - \frac{R_2}{L} i_L.$$

В матричной форме уравнения состояния анализируемой цепи имеют вид

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{bmatrix} e(t).$$

Пример 5.2. Записать уравнения состояния активной RC – цепи, показанной на рис. 5.5. Операционный усилитель работает в линейном режиме.

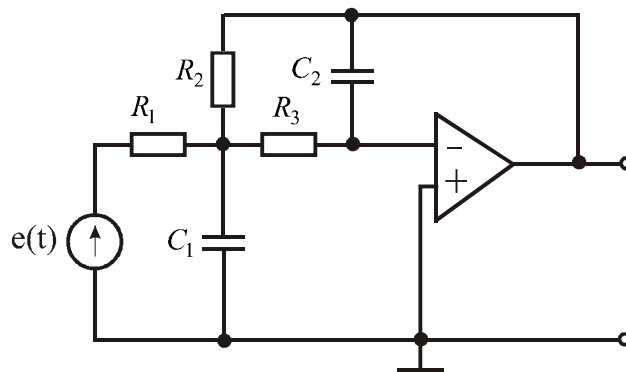


Рис. 5.5

Решение. Составим эквивалентную схему, заменив емкостные элементы источниками напряжения (рис. 5.6). Запишем систему уравнений по законам Кирхгофа для цепи на рис. 5.6.

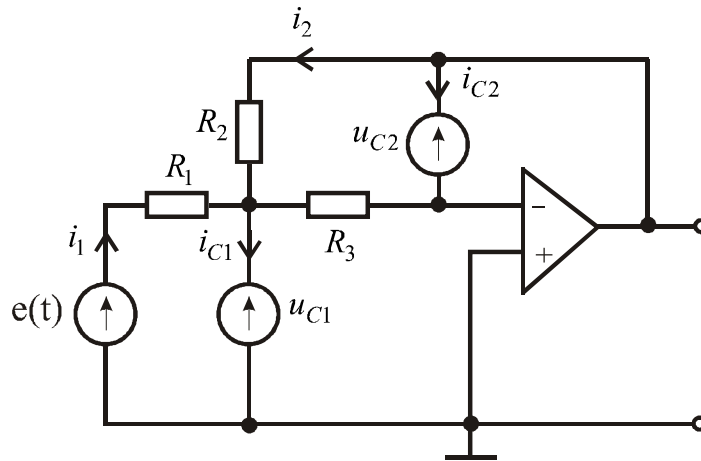


Рис. 5.6

Для узла, в котором сходятся резисторы R_1 , R_2 , R_3 и конденсатор C_1 ,

$$-i_1 - i_2 - i_3 + i_{C1} = 0. \quad (5.4a)$$

Для узла, к которому подключен инвертирующий вход ОУ,

$$i_3 - i_{C2} = 0. \quad (5.4б)$$

Для контура, включающего источник напряжения $e(t)$, резистор R_1 и конденсатор C_1 ,

$$R_1 i_1 = e(t) - u_{C1}. \quad (5.4в)$$

Для контура, образованного резисторами R_2 , R_3 и конденсатором C_2 ,

$$-R_2 i_2 + R_3 i_3 = -u_{C2}. \quad (5.4г)$$

Для контура, включающего резистор R_3 и вход ОУ:

$$-R_3 i_3 = u_{C1}. \quad (5.4д)$$

При составлении уравнений (5.4) предполагалось, что входные токи ОУ и дифференциальное напряжение на входе равны нулю: $u_d = 0$, $i_- = 0$.

Решив систему уравнений (5.4), получим

$$i_{C1} = -\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3} u_{C1} + \frac{1}{R_2} u_{C2} + \frac{1}{R_1} E; \quad (5.5a)$$

$$i_{C2} = -\frac{1}{R_3} u_{C1}. \quad (5.5б)$$

Разделив левую и правую части (5.5a), (5.5б) на C_1 и C_2 соответственно, получим уравнения состояния анализируемой цепи:

$$\frac{du_{C1}}{dt} = -\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{C_1 R_1 R_2 R_3} u_{C1} + \frac{1}{C_1 R_2} u_{C2} + \frac{1}{C_1 R_1} e(t);$$

$$\frac{du_{C2}}{dt} = -\frac{1}{C_2 R_3} u_{C1}.$$

В матричной форме

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{C1}}{dt} \\ \frac{du_{C2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{C_1 R_1 R_2 R_3} & \frac{1}{C_1 R_2} \\ -\frac{1}{C_2 R_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \end{bmatrix} E.$$

Рассмотренный алгоритм позволяет формировать уравнения состояния простых цепей вручную. В настоящее время разработаны эффективные алгоритмы формирования уравнений состояния цепей любой сложности на ЭВМ. Однако изучение этих алгоритмов выходит за рамки нашего курса теории электронных цепей.

4. Аналитическое решение уравнений состояния

Цель нашего курса – изучение алгоритмов компьютерного моделирования электронных цепей. Однако в этом параграфе мы рассмотрим аналитическое решение уравнений состояния цепи второго порядка. Это необходимо нам для того, чтобы понять, как связаны коэффициенты уравнений состояния с собственными частотами цепи, как они влияют на характер переходного процесса.

Рассмотрим последовательную RLC -цепь, которая не содержит независимых источников (рис. 5.7). Будем считать, что емкостный элемент заряжен до напряжения $u_C(0) = U_0$, а начальный ток индуктивного элемента $i_L(0) = 0$. Поскольку независимые источники в цепи отсутствуют, токи и напряжения в такой цепи являются реакцией при нулевом входном сигнале (реакцией при нулевом входе).

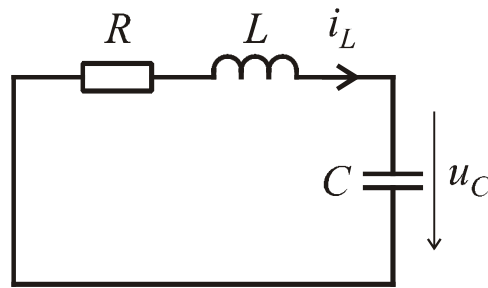


Рис. 5.7

Исследование реакции при нулевом входе имеет важное значение потому, что эта составляющая полной реакции цепи определяет характер переходного процесса. По виду реакции при нулевом входе можно судить об устойчивости цепи. Кроме того, результаты, полученные в данном параграфе для линейных цепей, остаются справедливыми и для нелинейных цепей.

Уравнения состояния цепи, показанной на рис. 5.7:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}.$$

В общей форме уравнения состояния цепи второго порядка, не имеющей независимых источников, имеют вид

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Преобразуем систему уравнений (5.6) в скалярное дифференциальное уравнение. Для этого продифференцируем первое уравнение в системе (5.6):

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = a_{11} \frac{dx_1}{dt} + a_{12} \frac{dx_2}{dt}.$$

Учитывая, что

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2,$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{12}} \frac{dx_1}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x_1,$$

получим скалярное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dx_1}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) x_1 = 0.$$

В более компактной форме это уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 x_1 = 0. \quad (5.7)$$

Здесь $\alpha = -(a_{11} + a_{22})/2$ – постоянная затухания или коэффициент демпфирования; $\omega_0^2 = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$ – частота собственных колебаний цепи.

Коэффициент α определяет меру демпфирования, т. е. потери энергии в цепи. Для цепи на рис. 5.7

$$\alpha = R/2L, \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Характеристический полином, соответствующий уравнению (5.7):

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -R/2L \pm \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}.$$

Корни характеристического уравнения называют *собственными частотами цепи*.

Заметим, что характеристическое уравнение не зависит от того, какую переменную мы выбрали – x_1 или x_2 . Следовательно, его корни будут одни и те же.

В зависимости от соотношения номиналов элементов собственной частоты могут быть вещественными или комплексно-сопряженными.

Решение уравнения (5.7) имеет вид

$$x_1(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (5.8)$$

Постоянные A_1 и A_2 определим, записав выражения для $x_1(t)$ и $\frac{dx_1(t)}{dt}$ в момент времени $t = 0_+$:

$$x_1(0) = A_1 + A_2; \quad (5.9a)$$

$$\frac{dx_1(0_+)}{dt} = p_1 A_1 + p_2 A_2. \quad (5.9б)$$

Такие же уравнения можно записать и для переменной $x_2(0)$. Поэтому индекс 1 у переменной x_1 опустим. Решая уравнения (5.9a) и (5.9б), получим:

$$A_1 = \frac{\frac{dx(0_+)}{dt} - x(0)p_2}{p_1 - p_2}; \quad A_2 = \frac{\frac{dx(0_+)}{dt} - x(0)p_1}{p_2 - p_1}. \quad (5.10)$$

Определим постоянные интегрирования для схемы на рис. 5.7. Учтем, что напряжение $u_C(0) = U_0$, а начальный ток индуктивного элемента $i_L(0) = 0$. Тогда для напряжения емкостного элемента u_C

$$A_{11} = -\frac{U_0 p_2}{p_1 - p_2}; \quad A_{12} = +\frac{U_0 p_1}{p_1 - p_2}.$$

Для тока i_L

$$A_{21} = -A_{22} = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)}.$$

Подставляя A_{11} и A_{12} , A_{21} и A_{22} в формулу (5.8), получим общие выражения для напряжения $u_C(t)$ и тока $i_L(t)$.

Форма переходных токов и напряжений зависит от вида корней характеристического уравнения. Рассмотрим важные для практики случаи.

Случай 1. Корни характеристического уравнения вещественные и отрицательные ($\alpha > \omega_0 > 0$).

Напряжение $u_C(t)$ представим в виде суммы экспонент

$$u_C(t) = A_{11}e^{p_1 t} + A_{12}e^{p_2 t} = \frac{U_0}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}). \quad (5.11a)$$

Ток индуктивного элемента

$$i_L(t) = A_{21}e^{p_1 t} + A_{22}e^{p_2 t} = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (5.11б)$$

Графики напряжения $u_C(t)$ и тока $i_L(t)$ показаны на рис. 5.8.

Если корни характеристического уравнения вещественные и положительные, то в соответствии с (5.11а, 5.11б) $u_C(t)$ и $i_L(t)$ представляют сумму двух возрастающих экспонент и при $t \rightarrow \infty$ становятся неограниченными. Такая цепь является неустойчивой.

Итак, при вещественных корнях характеристического уравнения токи и напряжения изменяются непериодически. Такой переходный процесс называют *апериодическим*.

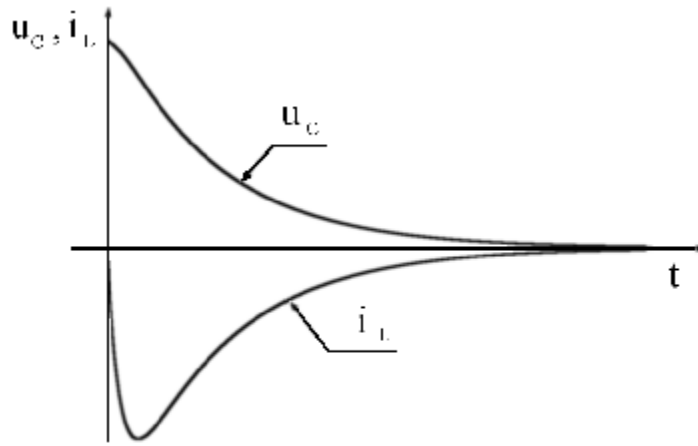


Рис. 5.8

Случай 2. Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные: $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. Здесь $j = \sqrt{-1}$.

В соответствии с (5.10) напряжение емкостного элемента

$$u_C(t) = -\frac{U_0 e^{\alpha t}}{j2\beta} [(\alpha - j\beta)e^{j\beta t} + (\alpha + j\beta)e^{-j\beta t}]. \quad (5.12)$$

Комплексное число $\alpha + j\beta$ представим в показательной форме:

$$\alpha + j\beta = \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) e^{j\phi},$$

где $\phi = \arctg(\beta/\alpha)$.

С учетом последнего равенства уравнение (5.12) примет вид

$$u_C(t) = -\frac{U_0 e^{\alpha t} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \frac{e^{j(\beta t - \phi)} - e^{-j(\beta t - \phi)}}{j2}.$$

Учитывая, что $(e^{j(\beta t - \phi)} - e^{-j(\beta t - \phi)})/j2 = \sin(\beta t - \phi)$, запишем окончательное выражение для $u_C(t)$:

$$u_C(t) = -U_0 \left(\sqrt{(\alpha^2 / \beta^2) + 1} \right) e^{\alpha t} \sin(\beta t - \varphi) \quad (5.13)$$

Ток индуктивного элемента

$$i_L(t) = -\frac{U_0 e^{\alpha t}}{j2bL} (e^{jbt} - e^{-jbt}) = -\frac{U_0}{bL} e^{\alpha t} \sin bt.$$

Таким образом, если собственные частоты комплексные, в цепи возникают синусоидальные колебания, затухающие (при $a < 0$) или возрастающие (при $a > 0$) с течением времени. Такой переходный процесс называют *колебательным*.

На рис. 5.9 показаны графики напряжения $u_C(t)$ и тока $i_L(t)$ для случая, когда вещественная часть корня $\alpha < 0$.

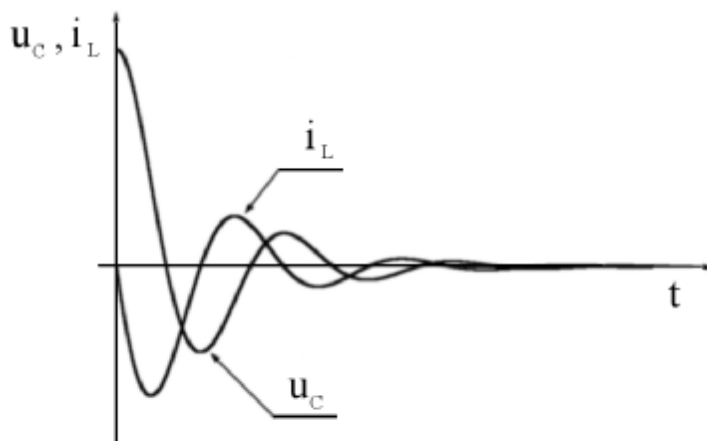


Рис. 5.9

В предельном случае при $R = 0$ корни характеристического уравнения окажутся на мнимой оси: $p_{1,2} = \pm j\beta$. При этом в цепи наблюдаются незатухающие синусоидальные колебания

$$u_C(t) = -U_0 \sin(\beta t - \pi/2) = U_0 \cos \beta t ;$$

$$i_L(t) = -\frac{U_0}{\beta L} \sin \beta t.$$

Графики $u_C(t)$ и $i_L(t)$ для случая мнимых корней показаны на рис. 5.10.

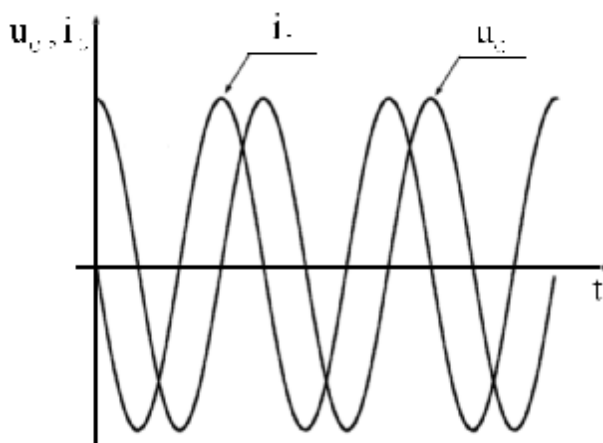


Рис. 5.10

Итак, характер переходного процесса определяется видом корней характеристического уравнения. Вещественным корням соответствует апериодический переходный процесс. В случае комплексных корней в цепи наблюдается колебательный переходный процесс.

5. Выводы

1. Поведение электрической цепи описывается в общем случае системой дифференциальных уравнений. Либо одним дифференциальным уравнением n -го порядка. Порядок уравнения равен суммарному числу индуктивных и емкостных элементов: $n = n_L + n_C$.
2. Наиболее рационально записывать уравнения цепи в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно первой производной одной из переменных. Такую систему называют уравнениями состояния.
3. Если корни характеристического уравнения цепи второго порядка комплексно-сопряженные, переходный процесс в цепи имеет колебательный характер.