

Лекция 6

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

План

1. Численные методы интегрирования уравнений состояния
2. Устойчивость методов численного интегрирования
3. Многошаговые методы численного интегрирования
4. Дискретные резистивные схемы замещения индуктивного и емкостного элементов
6. Выводы

1. Численные методы интегрирования уравнений состояния

Для решения уравнений состояния цепей высокого порядка широко используются численные методы. Рассмотрим простейшие методы интегрирования на примере решения уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, t),$$

описывающего поведение цепи первого порядка.

Разобьем интересующий нас промежуток времени на малые интервалы (шаги) $\Delta t = h$. Обозначим x_k - значения переменной $x(t)$ в дискретные моменты времени kh :

$$x_k = x(kh), k = 0, 1, 2, \mathbf{K}, n.$$

Начальное значение переменной $x_0 = x(0)$.

Простейшим методом численного интегрирования уравнений состояния является *явный метод Эйлера*. Явная формула Эйлера имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k + h \frac{dx_k}{dt} = x_k + hf(x_k, t_k). \quad (6.1)$$

Геометрическая интерпретация явного метода Эйлера показана на рис. 6.1. Функция $x(t)$ на интервале $t_k - t_{k+1}$ аппроксимируется прямой, совпадающей с касательной к этой функции в точке $t_k = kh$.

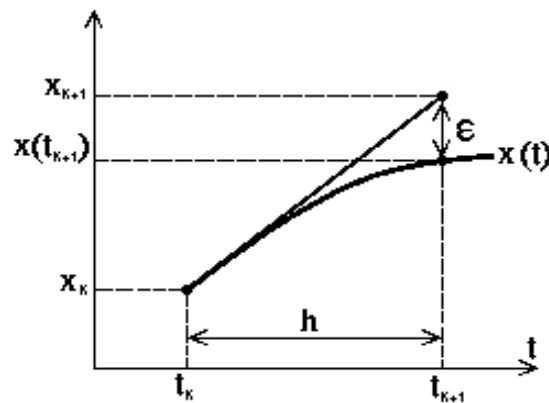


Рис. 6.1

Другим простейшим методом является *неявный, или обратный, метод Эйлера*. Неявная формула Эйлера имеет вид

$$x_{k+1} = x_k + h \frac{dx_{k+1}}{dt} = x_k + hf(x_{k+1}, t_{k+1}). \quad (6.2)$$

Неявным этот метод называют потому, что переменная x_{k+1} входит в левую часть формулы (6.2) и неявно, в виде производной $\frac{dx_{k+1}}{dt} = f(x_{k+1}, t_{k+1})$, в правую.

Решение, получаемое с помощью методов численного интегрирования, является приближенным. Различают *локальную ошибку*, получаемую на каждом шаге, и *глобальную ошибку*, накопленную на заданном интервале времени.

Определим величину локальной ошибки при интегрировании с помощью явного и неявного методов Эйлера. Разложим функцию $x(t)$ в окрестности точки t_k в ряд Тейлора:

$$x(t+h) = x(t) + h \frac{dx(t)}{dt} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2(t)}{dt^2},$$

где $t < t < t+h$.

Явную формулу Эйлера (6.16) можно рассматривать как разложение $x(t)$ в ряд Тейлора, в котором оставлены только линейные члены. Поэтому локальная ошибка интегрирования равна остаточному члену:

$$e = \frac{h^2}{2} \frac{d^2(t)}{dt^2}.$$

Чтобы определить ошибку интегрирования неявного метода Эйлера, представим $x(t) = x_{k-1}$ в виде ряда:

$$x(t) = x(t+h) - h \frac{dx(t+h)}{dt} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2(t)}{dt^2}.$$

Таким образом, для неявного метода Эйлера

$$e = -\frac{h^2}{2} \frac{d^2(t)}{dt^2}.$$

Итак, в обоих случаях локальная ошибка пропорциональна квадрату шага интегрирования, но имеет разные знаки. Локальная ошибка, очевидно, тем меньше, чем меньше шаг интегрирования. На рис. 6.2 показаны графики тока $i_L(t)$ в последовательной RLC цепи второго порядка, рассчитанного с помощью явного и неявного методов Эйлера. Шаг интегрирования выбран равным $\frac{1}{2}$ минимальной постоянной времени.

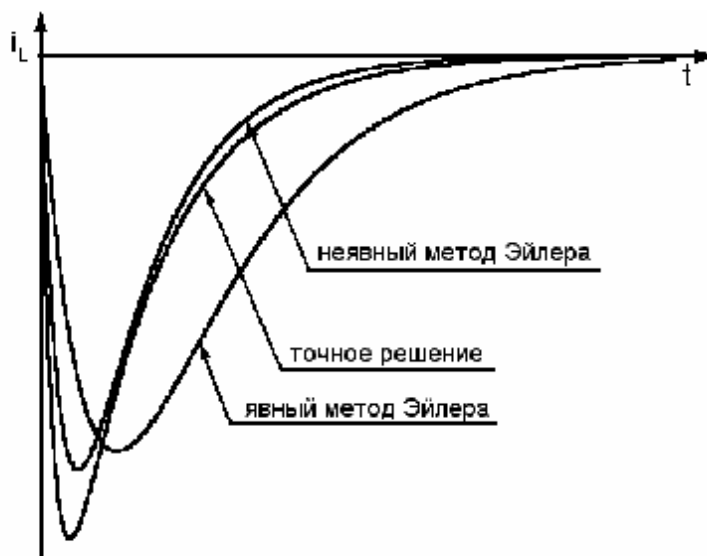


Рис. 6.2

Большую точность можно получить с помощью *метода трапеций*. Его можно рассматривать как комбинацию явной и неявной формул Эйлера:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} \left(\frac{dx_n}{dt} + \frac{dx_{n+1}}{dt} \right). \quad (6.3)$$

Можно показать, что локальная ошибка интегрирования для метода трапеций пропорциональна h^3 . Следовательно, если шаг интегрирования мал,

ошибка интегрирования для метода трапеций меньше, чем для методов Эйлера.

2. Устойчивость методов численного интегрирования

Изучим теперь поведение глобальной ошибки при использовании рассмотренных методов. Поскольку локальные ошибки могут принимать различные знаки, глобальная ошибка может бесконечно возрастать либо оставаться конечной. Это зависит от метода интегрирования, величины шага, а также поведения функции $x(t)$.

Рассмотрим накопление глобальной ошибки на примере решения уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Ix(t). \quad (6.4)$$

Таким уравнением описывается, например, поведение RC - цепи первого порядка. Точное решение этого уравнения имеет вид: $x(t) = x_0 e^{-It}$. Таким образом, переменная $x(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, если цепь устойчива, т. е. $I > 0$.

В соответствии с формулой (6.1)

$$x_1 = x_0 - hIx_0 = x_0(1 - hI);$$

$$x_2 = x_1 - hIx_1 = x_0(1 - hI)^2.$$

После n - го шага

$$x_n = x_0(1 - hI)^n.$$

Численная неустойчивость заключается в том, что при большом числе шагов численное решение расходится, т. е. начинает неограниченно расти, хотя истинное решение конечно.

Чтобы решение уравнения (6.1) устойчивой цепи ($I > 0$) было ограниченным, необходимо выполнение условия

$$|1 - hI| \leq 1,$$

или

$$h \leq \frac{2}{I} = 2t.$$

Здесь t – постоянная времени цепи, описываемой уравнением (6.4). В этом случае решение, получаемое с помощью явной формулы Эйлера, будет устойчивым, т.е. значение функции $x(t)$, вычисленное на n -м шаге при безграничном увеличении n , будет конечным.

Реакцию цепи второго и более высоких порядков можно представить в виде суммы экспонент:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-t/t_i}.$$

В этом случае максимальный шаг интегрирования явного метода Эйлера ограничен величиной $h < 2t_{\min}$. Здесь t_{\min} – минимальная постоянная времени цепи.

Рассмотрим теперь неявный метод Эйлера. Подставляя уравнение (6.4) в (6.2) найдем, что на n -м шаге

$$x_n = \frac{x(0)}{(1 + hI)^n}.$$

Если $I > 0$, решение будет устойчивым при любых положительных значениях h . Таким образом, неявный метод Эйлера является абсолютно устойчивым. Необходимо заметить, что локальная ошибка этого метода пропорциональна квадрату шага интегрирования. Поэтому при больших значениях h неявная формула Эйлера становится нечувствительной к быстро изменяющимся составляющим функции $x(t)$, т. е. "не замечает" такие составляющие.

Вопрос устойчивости методов численного интегрирования имеет очень важное значение. Методы интегрирования, позволяющие получить ограниченное решение тестового уравнения (6.4) при любом шаге интегрирования, называют *абсолютно устойчивыми*. Таким свойством обладают только неявные методы. Проблема устойчивости особенно важна для тех цепей и систем, реакцию которых можно представить в виде суммы экспонент с постоянными времени, различающимися на несколько порядков. Дифференциальные уравнения, описывающие поведение таких систем, называют *жесткими*. Составляющие реакции, имеющие минимальную постоянные времени, затухают весьма быстро по сравнению с длительностью переходного процесса, которая пропорциональна максимальной постоянной времени t_{\max} . Из-за ограничений на величину шага интегрирования явные методы редко используются в программах моделирования электронных схем.

Помимо обратного метода Эйлера, абсолютно устойчивым является метод трапеций. Решение уравнения (6.4) с помощью метода трапеций на n -м шаге имеет вид:

$$x_n = x(0) \left(\frac{1 - h \frac{I}{2}}{1 + h \frac{I}{2}} \right)^n.$$

Нетрудно убедиться, что при $n \rightarrow \infty$ решение $x_n \rightarrow (-1)^{n+1}$ независимо от величины шага. Таким образом, решение остается ограниченным при любой величине h . Однако если в реакции присутствуют быстро изменяющиеся составляющие, то будут наблюдаться медленно затухающие осцилляции вокруг истинного решения. Это свойство объясняется наличием производной dx_n/dt в формуле трапеций.

3. Многошаговые методы

Методы интегрирования, рассмотренные выше, являются одношаговыми, т.е. для расчета переменных на $n+1$ шаге необходимо знать переменные только на одном предыдущем шаге. Большую точность можно получить, используя значения переменных на нескольких предыдущих шагах. Методы численного интегрирования, которые используют для вычисления x_{n+1} информацию о нескольких ранее полученных значениях $x(t)$ называют *многошаговыми*. Линейная многошаговая формула порядка k имеет вид:

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^k a_i x_{n+1-i} + h \sum_{i=0}^k b_i \frac{dx_{n+1-i}}{dt}. \quad (6.5)$$

Если коэффициент $b_0 = 0$, метод является явным. При $b_0 \neq 0$ формула (6.5) описывает неявный многошаговый метод.

Нетрудно показать, что рассмотренные одношаговые методы численного интегрирования являются частными случаями формулы (6.5). Например, полагая $k=1, a_1=1, b_0=0, b_1=1$, получим явную формулу Эйлера. При $k=1, a_1=1, b_0=1, b_1=0$ имеем обратную формулу Эйлера.

При интегрировании жестких дифференциальных уравнений используют многошаговую *формулу дифференцирования назад* (ФДН), которая содержит только производную на $n+1$ шаге:

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^k a_i x_{n+1-i} + h b_0 \frac{dx_{n+1}}{dt}.$$

ФДН можно получить из общей формулы (6.5), полагая $b_1 = b_2 = \mathbf{K} = b_k = 0$. При $k = 1$ она совпадает с неявной формулой Эйлера. При $k = 2$ получим формулу Гира [11]:

$$x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - \frac{1}{3}x_{n-1} + h \frac{2}{3} \frac{dx_{n+1}}{dt}.$$

В настоящее время разработаны эффективные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений, имеющих большой разброс постоянных времени. Современные программы компьютерного моделирования электронных цепей используют методы численного интегрирования с переменными порядком и величиной шага. Подробно эти методы рассмотрены в [11 – 13].

4. Дискретные резистивные схемы замещения индуктивного и емкостного элементов

Применение методов неявного интегрирования позволяет по-иному подойти к проблеме формирования уравнений цепи во временной области. Алгоритмы формирования уравнений цепей общего вида в форме системы дифференциальных уравнений первого порядка являются весьма сложными. Уравнения состояния получаются на основе сложных преобразований системы интегродифференциальных уравнений, формируемых на основе законов Кирхгофа. Однако неявные методы интегрирования можно применять и для решения уравнений, не разрешенных относительно переменных состояния. Использование таких методов позволяет в отдельных точках временной области дифференциальным уравнениям поставить в соответствие систему алгебраических уравнений. Такой переход от решения дифференциальных уравнений, описывающих поведение цепи во временной области, к многократному решению системы линейных алгебраических уравнений соответствует замене реактивных элементов на каждом шаге их дискретными резистивными моделями.

Алгебраизацию дифференциальных уравнений, описывающих поведение индуктивного и емкостного элементов, рассмотрим на примере неявного метода Эйлера.

Напряжение емкостного элемента на $n + 1$ шаге в соответствии с неявным методом Эйлера

$$u_{n+1} = u_n + h \frac{du_{n+1}}{dt}. \quad (6.6)$$

Учтя, что ток емкостного элемента $i_C = C \frac{du_C}{dt}$, равенство (6.6) перепишем в виде

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{C} i_{n+1}.$$

Этому алгебраическому уравнению соответствуют эквивалентные резистивные схемы, показанные на рис. 6.3, а, б.

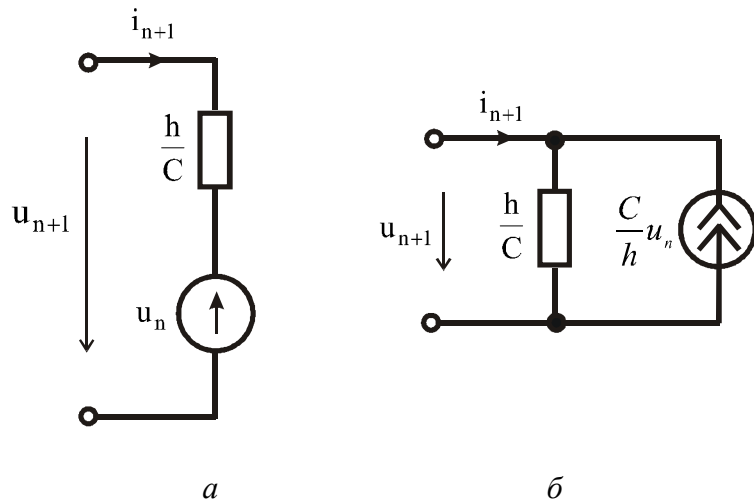


Рис. 6.3

Ток индуктивного элемента на $n+1$ шаге в соответствии с обратной формулой Эйлера

$$i_{n+1} = i_n + h \frac{di_{n+1}}{dt}. \quad (6.7)$$

Поскольку напряжение индуктивного элемента $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, равенство (6.7) можно заменить алгебраическим уравнением

$$i_{n+1} = i_n + \frac{h}{L} u_{n+1}.$$

Этому уравнению соответствуют резистивные эквивалентные схемы, показанные на рис. 6.4, а, б.

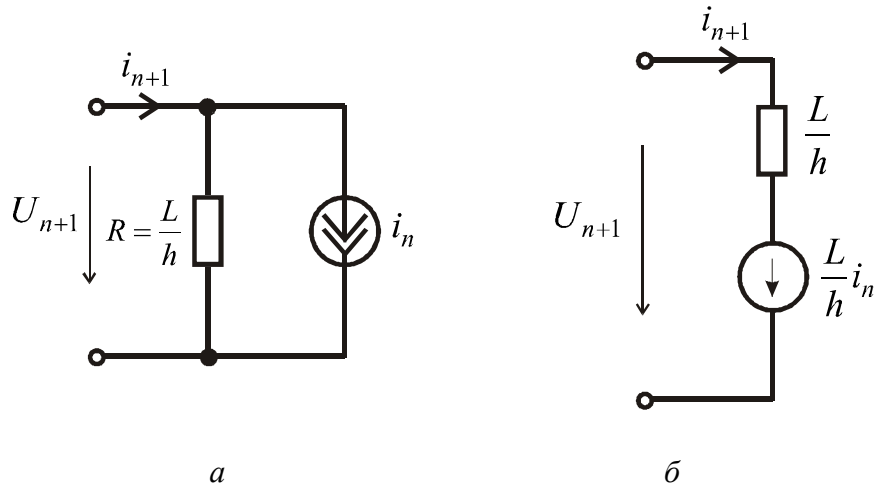


Рис. 6.4

Замена индуктивных и емкостных элементов резистивными моделями значительно упрощает расчет переходных процессов. Анализ цепи во временной области сводится к анализу эквивалентных резистивных схем в дискретные моменты времени. При этом отпадает необходимость формирования уравнений состояния. Для расчета резистивных схем замещения используют метод узловых напряжений.

3. Обобщенные дискретные схемы замещения, соответствующие линейной многошаговой формуле

Дискретные резистивные модели индуктивного и емкостного элементов могут быть получены и для многошаговых формул. Для емкостного элемента уравнение, соответствующее линейной многошаговой формуле (6.5), имеет вид

$$u_{n+1} = \sum_{j=1}^k a_j u_{n+1-j} + \frac{h}{C} \sum_{j=0}^k b_j i_{n+1-j}.$$

После перегруппировки слагаемых перепишем его в следующем виде

$$u_{n+1} = \sum_{j=1}^k \left(a_j u_{n+1-j} + \frac{h}{C} b_j i_{n+1-j} \right) + \frac{h}{C} b_0 i_{n+1} = \tilde{u}_n + \frac{h}{C} b_0 i_{n+1}. \quad (6.8)$$

Здесь

$$\tilde{u}_n = \sum_{j=1}^k \left(a_j u_{n+1-j} + \frac{h}{C} b_j i_{n+1-j} \right).$$

Уравнению (6.8) соответствуют резистивные схемы, показанные на рис. 6.5, а, б. Нетрудно видеть, что резистивная схема осталась такой же, изменились лишь параметры элементов.

Для индуктивного элемента многошаговая формула имеет вид

$$i_{n+1} = \sum_{j=1}^k a_j i_{n+1-j} + \frac{h}{L} \sum_{j=0}^k b_j u_{n+1-j}.$$

После перегруппировки слагаемых получим

$$i_{n+1} = \tilde{u}_n + \frac{h}{L} b_0 i_{n+1}.$$

Здесь

$$\tilde{u}_n = \sum_{j=1}^k \left(a_j i_{n+1-j} + \frac{h}{L} b_j u_{n+1-j} \right).$$

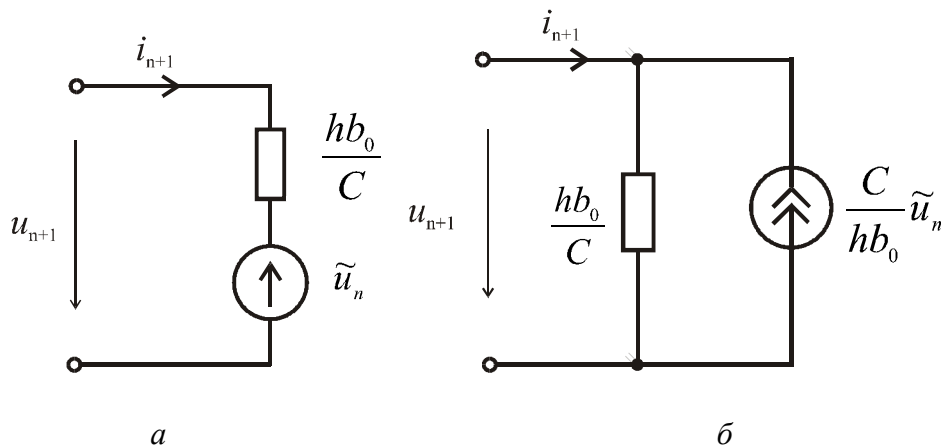


Рис. 6.5

Следует особо отметить, что структура дискретных моделей одинакова для различных неявных методов, изменяются лишь значения резисторов и источников.

Дискретные схемы замещения могут быть получены и для явных методов численного интегрирования. Однако они содержат только независимые источники напряжения (для емкостных элементов) и тока (для индуктивных элементов). Резистивные элементы в таких моделях отсутствуют.

4. Выводы

1. Для решения уравнений состояния цепей высокого порядка используют численные методы.

2. Простейшими численными методами интегрирования уравнений состояния являются методы Эйлера.
3. Современные программы компьютерного моделирования электронных цепей используют методы численного интегрирования с переменными порядком и величиной шага.
4. Использование неявных методов позволяет в отдельных точках временной области дифференциальным уравнениям поставить в соответствие систему алгебраических уравнений. Такой переход от решения дифференциальных уравнений к многократному решению системы линейных алгебраических уравнений соответствует замене реактивных элементов на каждом шаге их дискретными резистивными моделями.